

8. cvičení - teorie

Symbol $\mathbb{K}$ značí množinu $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Základní pojmy

Definice. Necht' $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $m \in \mathbb{N}$ a $u_1, \dots, u_m \in V$. Řekneme, že vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, jež je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $u_1, \dots, u_m$ nejsou lineárně závislé, pak říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**. Řekneme, že množina $M \subseteq V$ je **lineárně nezávislá**, jestliže libovolná m -tice po dvou různých vektorů z M je lineárně nezávislá.

Poznámka. Někdy se používá: LN = lineárně nezávislá.

Definice. Je-li $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ a $u_1, \dots, u_m \in V$, pak **lineární obal vektorů** $u_1, \dots, u_m$ je

$$\text{lin}_{\mathbb{K}}\{u_1, \dots, u_m\} = \{v \in V : v \text{ je lineární kombinací vektorů } u_1, \dots, u_m\}.$$

Definice. Necht' $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $B \subseteq V$. Řekneme, že B je **báze prostoru** V , jestliže množina B je lineárně nezávislá a $V = \text{lin}_{\mathbb{K}}(B)$.

Věta 10.1.

- (i) Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.
- (ii) Každý vektorový prostor má bázi. Počet prvků báze je určen jednoznačně.

Definice. Počet prvků báze budeme nazývat **dimenze prostoru** V . Dimenzi V značíme $\dim V$. Necht' V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Je-li $\dim V < \infty$, řekneme, že V je **konečnědimenzionální**. Je-li $\dim V = +\infty$, mluvíme o **nekonečnědimenzionálním** vektorovém prostoru.

Věta 10.2. Necht' V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{K}$.

- (i) Jsou-li $v_1, \dots, v_n \in V$ LN vektory ve V , pak množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je báze prostoru V .
- (ii) Pokud pro $v_1, \dots, v_n \in V$ platí $\text{lin}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_n\} = V$, pak množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je báze prostoru V .

Lineární zobrazení, jádro a obraz

Definice. Necht' U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Pak zobrazení $L: U \rightarrow V$ je **lineární**, pokud

- $\forall u_1, u_2 \in U: L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$
- $\forall a \in \mathbb{K} \forall u \in U: L(a \cdot u) = a \cdot L(u)$.

Věta 10.3. Necht' U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L: U \rightarrow V$ necht' je lineární zobrazení. Potom platí:

- (i) $\text{Ker } L$ je vektorový podprostor U .
- (ii) $\text{Im } L$ je vektorový podprostor V .
- (iii) $\dim U = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L$.

Věta 5.18 z 2. semestru. Zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineární právě tehdy, když existuje $A \in M(n \times n)$ taková, že

$$\forall u \in \mathbb{R}^n: f(u) = Au.$$

Determinant

Definice. Necht A je matice typu $n \times n$ s reálnými prvky. Maticí A_{ij} rozumíme matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Definice. Necht $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$. Pak **determinant matice** A definujeme takto:

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & n = 1 \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1}, & n > 1. \end{cases}$$

Pro $\det A$ budeme též používat symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 5.8 z 2. semestru. Necht $A \in M(n \times n)$.

- (i) Necht matice A' vznikne z A vyměněním dvou řádků mezi sebou. Pak $\det A' = -1 \det A$.
- (ii) Necht matice A' vznikne z A tak, že v A jeden řádek vynásobíme reálným číslem λ , pak platí $\det A' = \lambda \det A$.
- (iii) Necht matice A' vznikne z A tak, že λ -násobek jednoho řádku přičtu k jinému řádku (tj. provedeme třetí řádkovou elementární úpravu), pak $\det A' = \det A$.

Věta 5.9 z 2. semestru. Pro $A \in M(n \times n), j \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Věta 5.10 z 2. semestru. Je-li $A \in M(n \times n)$ je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice, pak

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$